Esame di Stato – Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica – 21 giugno 2018

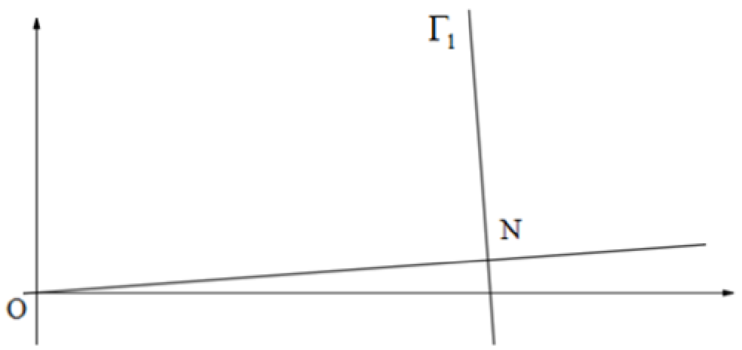
PROBLEMA 2 (soluzione a cura di E. Castagnola e L. Tomasi, con l'uso della calcolatrice grafica TI-Nspire CX (non CAS)

Consideriamo la funzione $f_k : \Re \rightarrow \Re$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in Z$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_p, y_p)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_p > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Soluzione

1) Cominciamo con l'osservare che per qualsiasi valore del parametro k il punto di ascissa 0 di Γ_k ha coordinate (0, 9), mentre il punto di ascissa 1, dipendente da k, ha coordinate (1, k + 8). La derivata prima della nostra funzione $f_k(x)$ è data da

$$f_k'(x) = -3x^2 + k\,.$$

Nel punto di ascissa 0 risulta $f_k'(0) = k$ e nel punto di ascissa 1 $f_k'(1) = k - 3$. Pertanto la retta r_k ha equazione

$$r_k\colon\; y - 9 = kx$$

cioè $y = kx + 9$. Analogamente la retta s_k ha equazione

$$s_k\colon\; y - k - 8 = (k-3)(x-1)$$

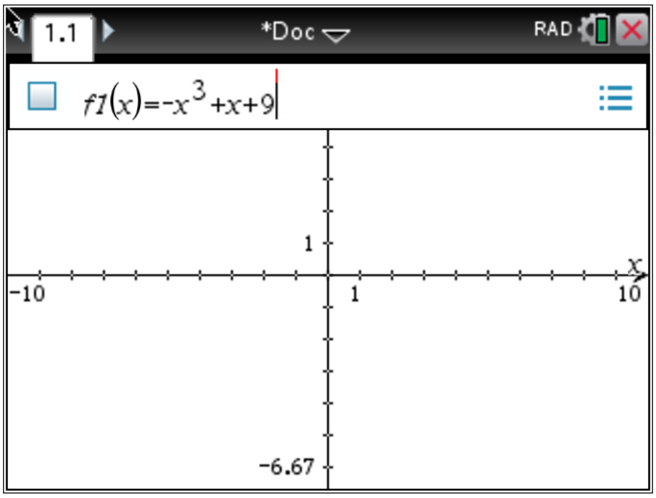
cioè $y = (k - 3)x + 11$. Le coordinate del punto di intersezione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = (k-3)x + 11 \\ y = kx + 9 \end{cases}$$

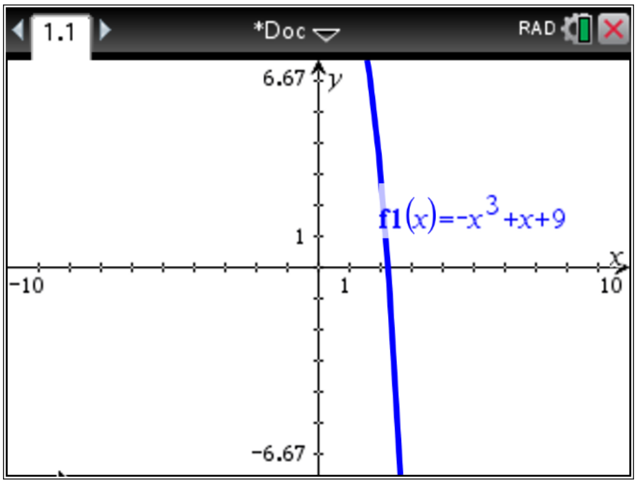
che ha come soluzione $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{2}{3}k + 9$. Quindi il punto M ha coordinate $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}k + 9\right)$, cioè l'ascissa vale sempre $\frac{2}{3}$.

2) Per k = 1 l'ordinata di M vale $9 + \frac{2}{3} < 10$, mentre per k = 2 vale $9 + \frac{4}{3} > 10$. La disuguaglianza $9 + \frac{2}{3}k > 10$ vale a maggior ragione per k > 2.

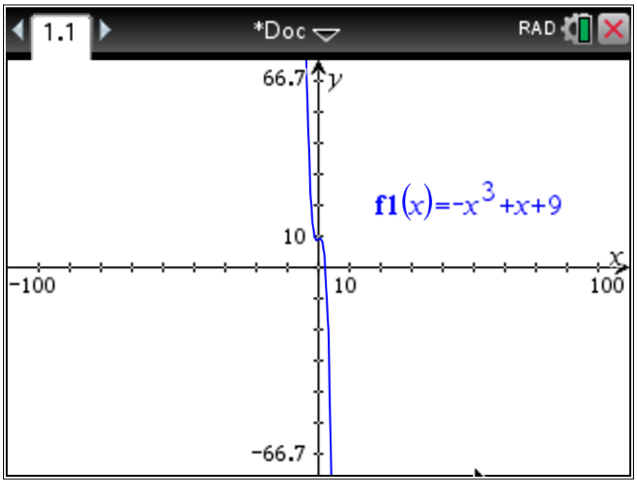
Per k = 1 risulta $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ e $f_1'(x) = -3x^2 + 1$. La funzione è un polinomio di terzo grado e quindi è definita per ogni $x \in$ **R**. Utilizzando la calcolatrice grafica possiamo inserire nell'ambiente grafico la nostra funzione



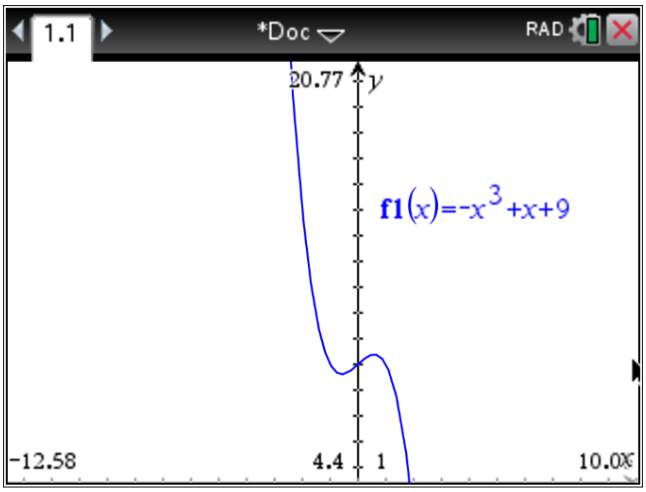
e visualizziamo



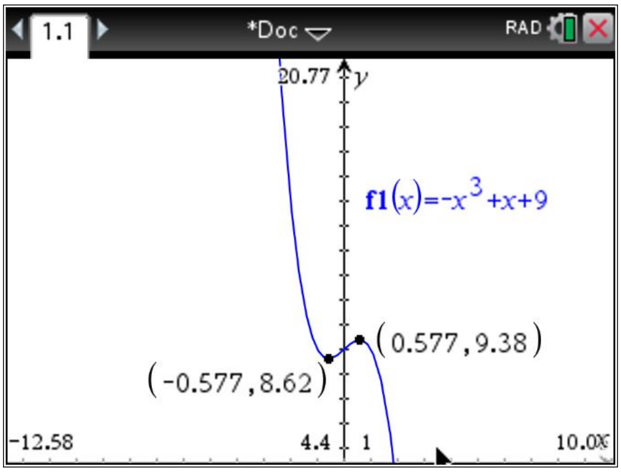
Nella finestra standard il grafico è poco significativo ma possiamo adattare opportunamente la finestra di visualizzazione



Questo grafico lascia intuire che si tratta di una funzione "in generale" decrescente con un probabile punto di flesso nell'intorno del punto di ascissa 0. Ingrandiamo opportunamente la zona che ci interessa



Questo grafico chiarisce le idee: possiamo supporre l'esistenza di un punto di flesso di coordinate (0, 9) e di un minimo relativo con asissa negativa e di un massimo relativo con ascissa positiva di valore opposto rispetto all'ascissa del minimo. Analizziamo il grafico con gli strumenti della calcolatrice



Questo fornisce una prima conferma di quanto previsto.
Studiamo ora la nostra funzione con gli strumenti dell'analisi. Risulta innanzi tutto

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty .$$

Studio della derivata prima:

$$f_1'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f_1'(x) > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad f_1'(x) < 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o } x > \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

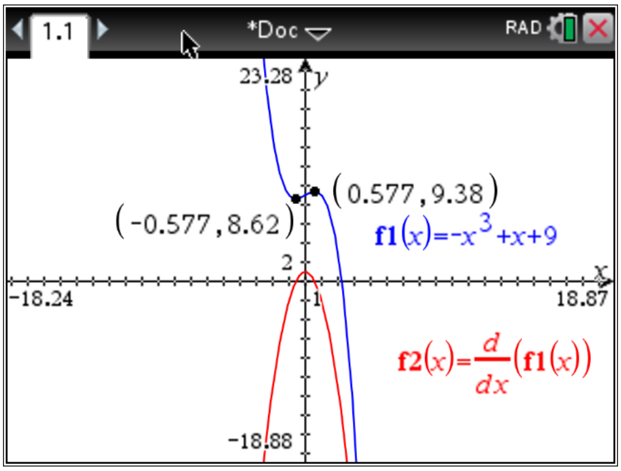
Pertanto $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ è l'ascissa del punto di minimo e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è l'ascissa del punto di massimo. Le coordinate del minimo e del massimo sono minimo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{81-2\sqrt{3}}{9}\right)$ e Massimo $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{81+2\sqrt{3}}{9}\right)$.

La derivata prima, il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$, quindi il grafico della nostra funzione ha la concavità verso l'alto per $x < 0$ e la concavità verso il basso per $x > 0$ e quindi il punto di coordinate (0, 9) è un punto di flesso.

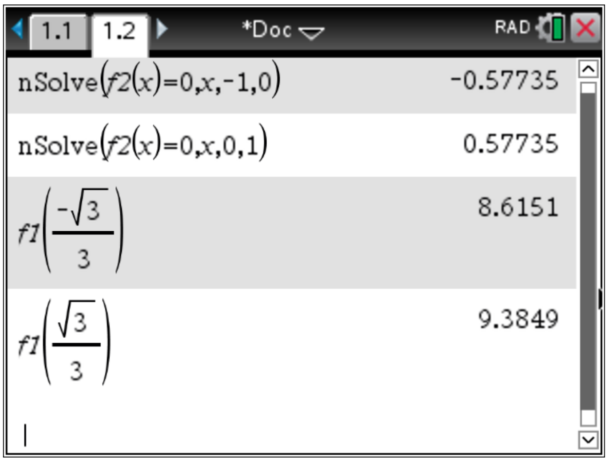
Derivata seconda

$f_1''(x) = -6x$ e questo conferma quanto appena detto.

Con la calcolatrice grafica possiamo inserire nel nostro ambiente grafico anche la derivata prima



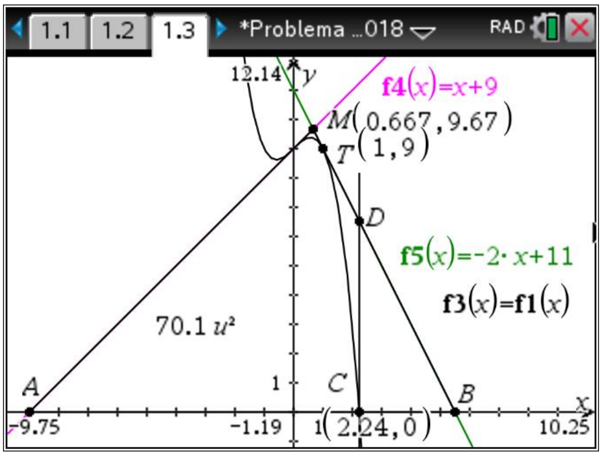
Questo conferma quanto dedotto per via analitica. Possiamo anche verificare nell'ambiente calcolo quanto dedotto nell'ambiente grafico



3) Dai risultati del punto 2) deduciamo che le nostre rette hanno equazione:

r_1: $y = x + 9$ e s_1: $y = -2x + 11$

e si intersecano nel punto $M\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{3}\right)$. Le due rette tangenti la curva grafico della funzione e l'asse delle ascisse suddividono il triangolo *T* in diverse zone. Rappresentiamo graficamente questa situazione



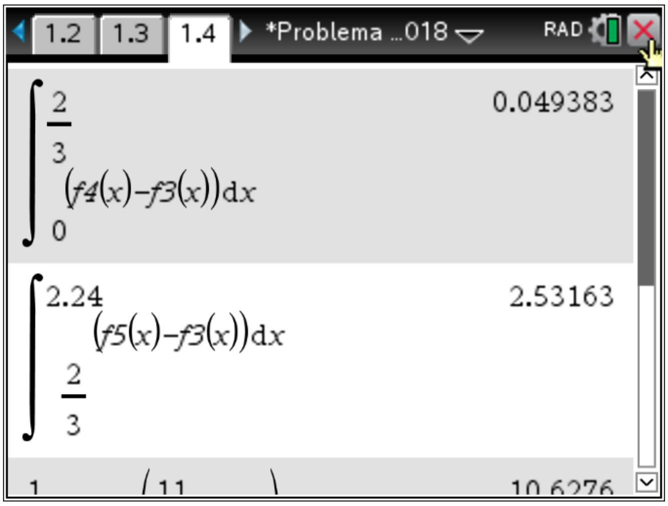
La probabilità cercata sarà data dal rapporto tra 1) l'area della figura piana delimitata dalle due rette tangenti r_1 e s_1 e dal grafico della nostra sull'intervallo [0, 1] a cui dobbiamo aggiungere l'area del triangolo mistilineo *TCD*, essendo *C* il punto di intersezione della nostra cubica con l'asse delle ascisse la cui ascissa vale approssimativamente 2.24 e infine l'area del triangolo *DCB* essendo *D* il punto di intersezione della tangente s_1 con la retta perpendicolare all'asse *x* e passante per *C* e risulta *D*(2.24, 6.52) e 2) l'area del triangolo che abbiamo indicato con *MAB*. L'area del triangolo è di determinazione immediata

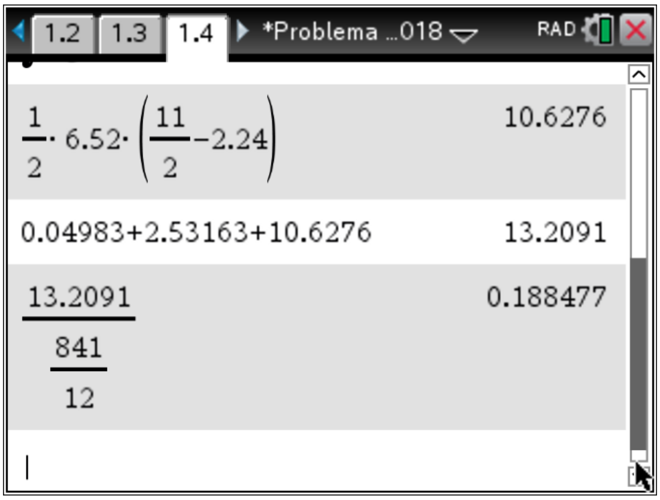
$$\text{Area}(MAB) = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+9\right)\cdot\frac{29}{3}=\frac{841}{12}\,.$$

Per il calcolo della somma delle aree sopra indicate dobbiamo procedere come segue:

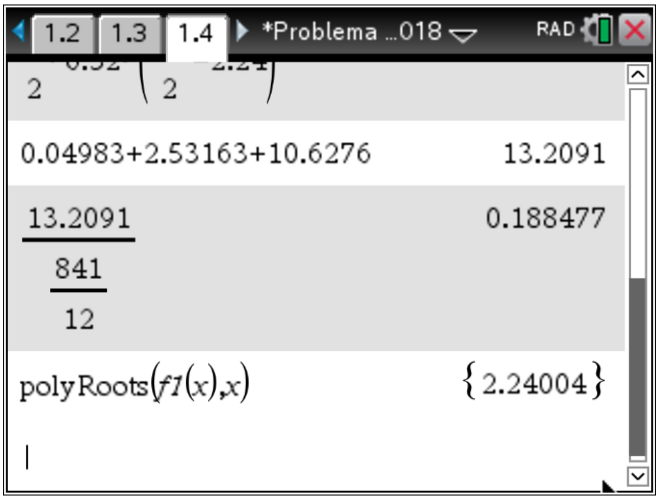
$$\int_0^{\frac{2}{3}}(x+9+x^3-x-9)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2.24}(8-2x+11+x^3-x-9)dx+\frac{1}{2}\cdot 6.52\cdot\left(\frac{11}{2}-2.24\right)$$

dove l'ultimo termine rappresenta l'area del triangolo *BCD*. Svolgendo i calcoli otteniamo come risultato 13.209. Quindi la probabilità data dal rapporto fra le aree vale circa 0.18848 ≈ 18.85% .
Questi calcoli si possono controllare anche nell'ambiente calcolo della calcolatrice





Inoltre, sempre nell'ambiente calcolo otteniamo



in accordo con quanto trovato per via grafica.

OSSERVAZIONE. È abbastanza insolito incontrare un problema di maturità in cui si richiede la determinazione approssimata di uno zero di un polinomio di terzo grado

4)

Supponiamo in generale che la nostra funzione $f(x) = P_n(x)$ sia un polinomio di grado *n*. Allora la sua derivata prima $f'(x) = Q_{n-1}(x)$ sarà un polinomio di grado *n* – 1. La pendenza della retta normale in un generico punto del grafico è data da $n(x) = -\dfrac{1}{Q_{n-1}(x)}$. La retta normale in un punto della curva di ascissa x_0 e passante per l'origine *O* avrà equazione

$$y = -\frac{1}{Q_{n-1}(x_0)}x$$

Nei punti di intersezione dovrà essere soddisfatta l'uguaglianza

$$-\frac{1}{Q_{n-1}(x_0)}x = P_n(x).$$

In altre parole dovremo cercare quei valori di x_0 per i quali è soddisfatta l'uguaglianza

$$-x_0 = Q_{n-1}(x_0)P_n(x_0).$$

Ma questa è un'equazione di grado 2*n* – 1 e quindi le soluzioni, cioè i punti di intersezione, saranno al massimo 2*n* – 1.