CampuStore
Innovation for education

CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

Simulazione di prova scritta di Matematica – Fisica – 28 febbraio 2019

Quesito 4 - Soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX di Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T3 Italia - Teachers Teaching with Technology

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
   - incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
   - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
   - passi per il punto $P(7, 10)$.

   Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

Soluzione

Una funzione razionale che soddisfa alle ipotesi deve avere il fattore $(x+1)$ almeno con molteplicità 1 e il fattore $(x-2)$ almeno con molteplicità 2 del polinomio $s(x)$ al numeratore.

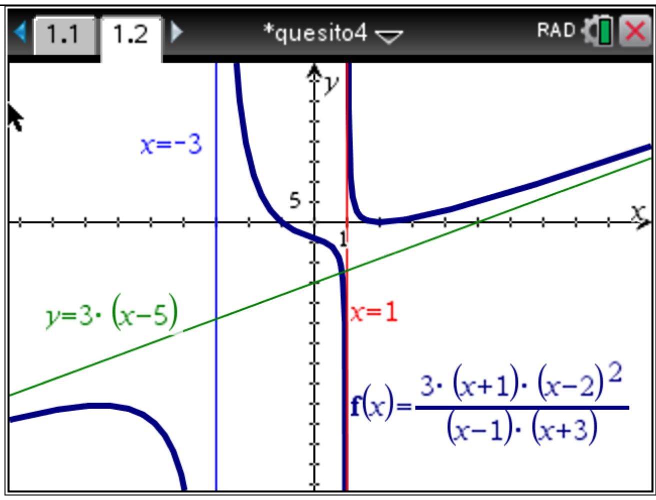
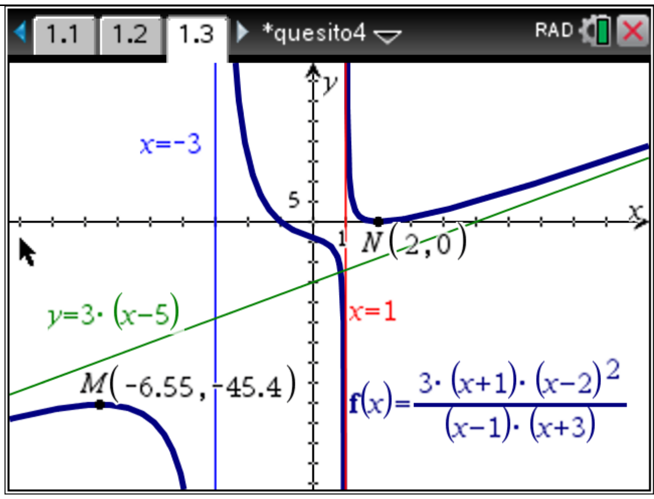
Analogamente, il polinomio $t(x)$ al denominatore deve contenere il fattore $(x-1)$ e il fattore $(x+3)$ ciascuno almeno con molteplicità 1. La funzione razionale più semplice che soddisfa queste richieste è la seguente:

$f(x) = \dfrac{a(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$ dove *a* è una costante reale.

Imponendo il passaggio per il punto (7, 10), si ottiene: $f(7) = 10$.

Si ha quindi $\dfrac{a \cdot 8 \cdot 5^2}{6 \cdot 10} = 10$, da cui si ricava $a = 3$. Una funzione quindi, che soddisfa alle ipotesi, è la seguente:

$$f(x) = \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}.$$

Con una calcolatrice grafica è immediato tracciare il grafico della funzione $f(x)$. Questa funzione ha un minimo relativo nel punto (2;0). Gli asintoti verticali, in base alle ipotesi, sono le rette di equazione $x=-3$ e $x=1$. La funzione ha per asintoto obliquo la retta di equazione $y=3(x-5)$.	
La funzione $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto (2;0) e un massimo relativo nel punto (-6.55;-45.4) che si possono facilmente trovare con l'uso della calcolatrice, usando nell'ambiente Grafici: Menu>Analizza grafico>Massimo e rispettivamente Menu>Analizza grafico>Minimo.	

Per motivare quanto abbiamo anticipato con l'uso della calcolatrice grafica, eseguiamo la divisione tra il numeratore e il denominatore. Si trova:

$$\frac{3\left(x^3-3x^2+4\right)}{x^2+2x-3}=3\left(x-5+\frac{13x-11}{x^2+2x-3}\right).$$

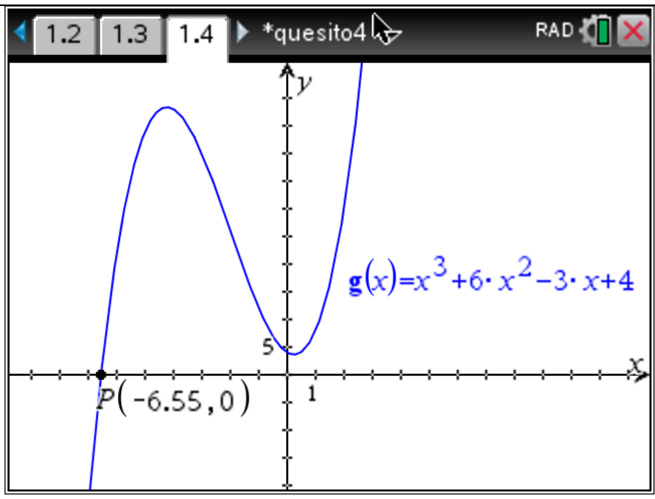
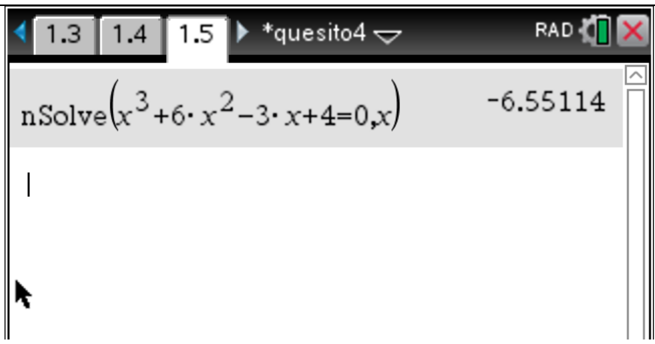
Quindi la funzione $f(x)$ ha per asintoto obliquo la retta di equazione: $y=3(x-5)$.

Per giustificare la presenza dei massimi e dei minimi, già determinati con l'uso della calcolatrice grafica, occorre ricavare la derivata prima:

$$f'(x)=3\frac{(x-2)\left(x^3+6x^2-3x+4\right)}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

La derivata prima si annulla per $x=2$ (punto di minimo relativo) e in $x=-6,55...$ (punto di massimo relativo).

Per trovare lo zero approssimato $x=-6,55...$ occorre studiare la funzione $g(x)=x^3+6x^2-3x+4$ presente al numeratore.

È una cubica che ha un solo zero reale che si può facilmente trovare con l'uso della calcolatrice grafica. Il grafico della funzione $g(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 4$ è riportato qui a fianco. Lo zero approssimato vale circa $x = -6.55...$ In tale punto la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo.	
Lo zero approssimato si può anche determinare in una pagina calcolatrice come si vede qui a fianco. Si aggiunge una pagina Calcolatrice. Si preme Menu>Algebra>Risolutore numerico. Compare nSolve( ). Si scrive tra parentesi l'equazione da risolvere numericamente, seguita dalla variabile rispetto alla quale si vuole risolvere.	

Commento
Livello di difficoltà stimato del quesito: alto.
L'argomento è presente nel QdR di Matematica. Sì.
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? Sì
Per la risoluzione del problema è molto utile usare una calcolatrice grafica perché il grafico della funzione si ottiene dopo un procedimento lungo e laborioso. La derivata prima possiede anche uno zero da determinare in modo approssimato e con la calcolatrice grafica è pressoché immediato da trovare.