CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 21 giugno 2018

QUESTIONARIO

Quesito 3
Soluzione a cura di S. De Stefani e L. Tomasi

3. Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

Il coefficiente angolare della retta tangente deve essere uguale al valore assunto dalla derivata prima della funzione nel *suo* punto di tangenza $T(\alpha; \alpha^3 - 4\alpha^2 + 5)$.

Si ha: $y' = 3x^2 - 8x$,

$y'(\alpha) = -4 \rightarrow 3\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{2}{3}, 2.$

- Da $\alpha = \frac{2}{3}$:

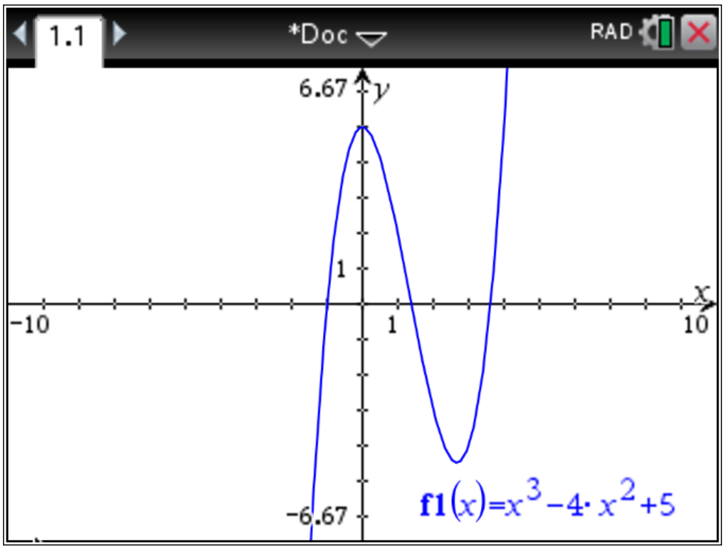
  si ha che $T_1\left(\frac{2}{3}; \frac{95}{27}\right)$ da cui, sostituendo T_1 nell'equazione della retta tangente, si ottiene $\boldsymbol{k = \frac{167}{27}}$.
- Da $\alpha = 2$:

  si ha che $T_2(2; -3)$ da cui, sostituendo T_2 nell'equazione della retta tangente, si ottiene $\boldsymbol{k = 5}$.

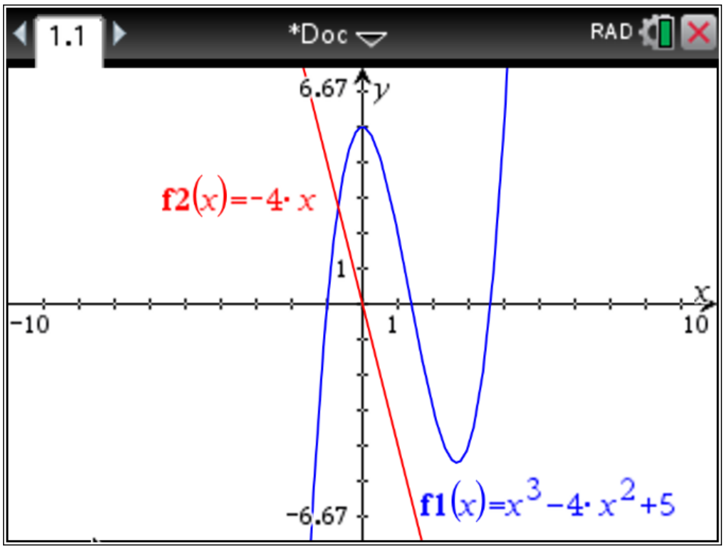
Inseriamo nella calcolatrice grafica la funzione il cui grafico ha equazione

Risoluzione con la calcolatrice TI-Nspire CX (di E. Castagnola)

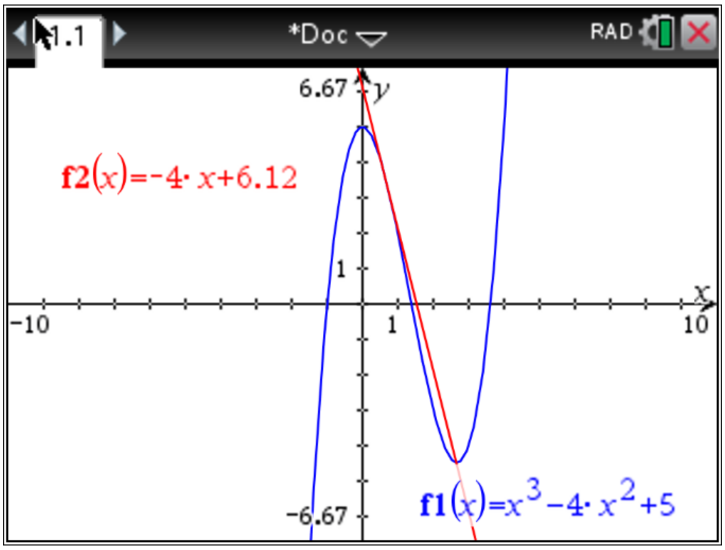
Inseriamo nella nostra calcolatrice grafica la funzione il cui grafico ha equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.



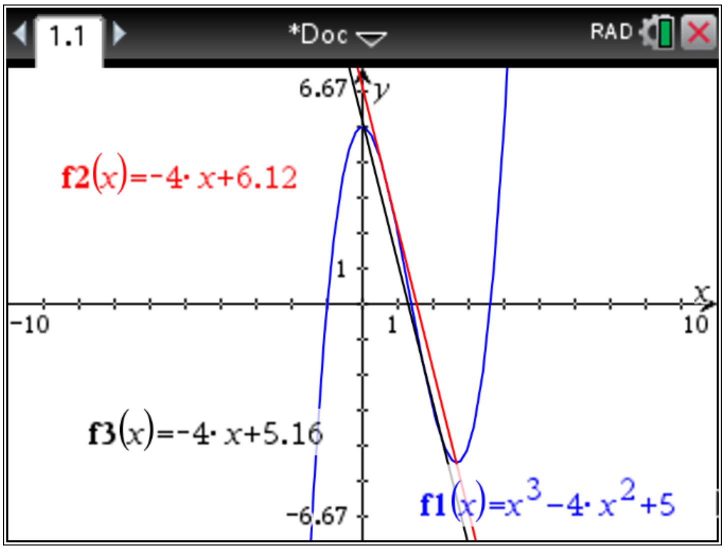
L'andamento è quello tipico di una cubica. Inseriamo ora nell'ambiente grafico la retta di equazione $y = -4x$ a cui tutte le rette del fascio $y = -4x + k$ sono parallele.



Nell'ambiente grafico possiamo spostare una retta parallelamente a se stessa fino ad arrivare alla seguente situazione



Quello visualizzato è un "possibile valore di k, cioè $k \approx 6.12$. D'altra parte mi aspetto che se esiste una retta tangente in un certo punto P_0 esisterà, per la simmetria di una cubica rispetto al suo punto di flesso, anche la tangente parallela alla retta $y = -4x$ e passante per il punto P_0' simmetrico di P_0 rispetto al flesso. Possiamo provare a inserire nell'ambiente grafico di nuovo la retta di equazione $y = -4x$ e spostarla parallelamente a se stessa.



È chiara la difficoltà di spostare la retta, manualmente, e parallelamente a se stessa, tuttavia questo lavoro sperimentale ci fa supporre l'esistenza tra le rette del fascio di due rette tangenti. Per andare oltre occorre procedere analiticamente. Osserviamo che il valore 5 trovato analiticamente è abbastanza vicino al valore "sperimentale" 5.16 e il valore $\frac{167}{27} \approx 6.1852$ è ancora più vicino all'altro valore da noi trovato.

Analiticamente, dopo aver calcolato la derivata seconda, si trova che il punto di flesso F ha coordinate $F\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{27}\right)$ e si può verificare che i due punti di tangenza T_1 e T_2 sono simmetrici rispetto a F.