CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

Simulazione di prova scritta di Matematica – Fisica – 28 febbraio 2019

Quesito 1 - Soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX di Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g\colon \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

Soluzione

La funzione $g(x)$ deve essere continua nel punto $x=1$. Quindi i limiti $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$ devono esistere, finiti ed essere uguali. Si ha quindi:

$$\lim_{x\to1^-}(3-ax^2) = \lim_{x\to1^+}\frac{b}{x-3}.$$

Si ottiene $3-a=-\dfrac{b}{2}$ e quindi: $b=2a-6$.

La funzione $g(x)$ deve essere derivabile nel punto $x=1$.

La funzione è derivabile a sinistra in $x=1$ e si ha $f'_-(1)=-2a$

Calcoliamo il seguente limite, che rappresenta il rapporto incrementale destro nel punto $x=1$:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}.$$

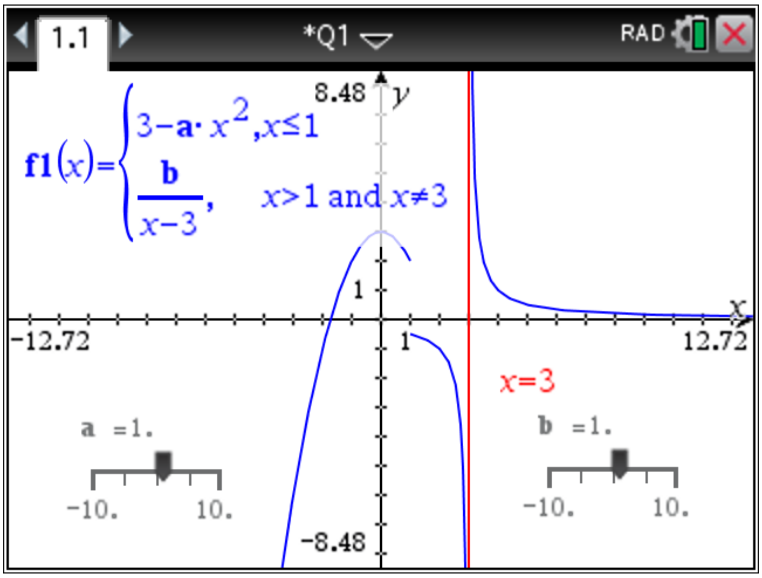
Tale limite deve esistere, finito e uguale alla derivata sinistra nel punto $x=1$.
Si ha:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{\frac{b}{h-2}+\frac{b}{2}}{h} = b\cdot\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{h-2}+\frac{1}{2}}{h} = b\cdot\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2(h-2)} = -\frac{b}{4}.$$

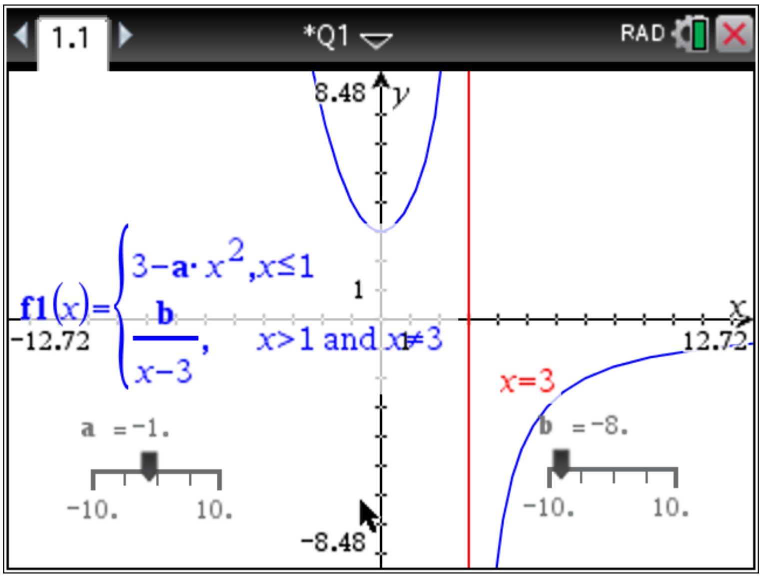
Quindi si ricava: $-2a=-\frac{b}{4}$ → $b=8a$.

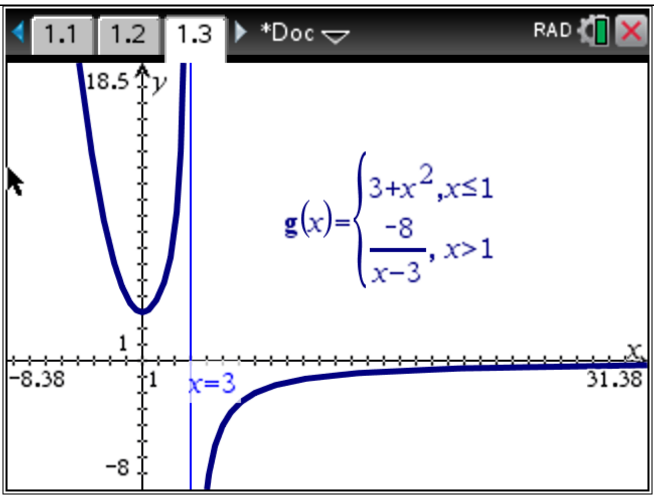
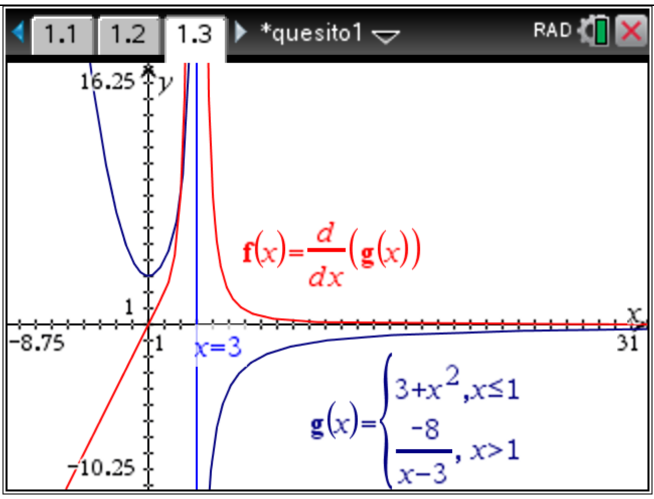
In definitiva si ha $a=-1$ e $b=-8$.

Con la calcolatrice grafica si potrebbe anche avere un approccio iniziale più intuitivo. In una pagina grafica si creano due cursori a scorrimento relativi ai due parametri *a* e *b* del quesito e si inserisce la funzione definita a tratti; il grafico presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa $x=1$ per la quasi totalità dei valori dei parametri.



Variando i cursori è possibile “ottenere” la continuità del grafico in corrispondenza di *a*= -1 e *b* = -8.



In definitiva si ottiene la seguente funzione: $$g(x)=\begin{cases}3+x^2 & \text{per } x\le 1\\ -\dfrac{8}{x-3} & \text{per } 1<x<3 \vee x>3\end{cases}$$ La funzione ha un minimo relativo per $x=0$ dove vale 3. Ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse e asintoto verticale la retta di equazione $x=3$. Il grafico è formato dall'unione di un arco di parabola e da due archi di iperbole equilatera. Il grafico della funzione $g(x)$ è riportato qui a fianco. Tramite la calcolatrice, occorre definirla a tratti (vedi a fianco).	
La derivata prima di $g(x)$ è: $$f(x)=g'(x)=\begin{cases}2x & \text{per } x\le 1\\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & \text{per } 1<x<3 \vee x>3\end{cases}$$ Riportiamo qui a fianco il grafico della funzione (in blu) e della sua derivata prima (in rosso). Sulla calcolatrice possiamo ottenere immediatamente il grafico della derivata prima, ponendo (vedi qui a fianco): $$f(x)=\frac{d}{dx}(g(x))$$	

Commento
Livello di difficoltà stimato del quesito: alto.
L'argomento è presente nel QdR di Matematica? Si
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? Si
Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica perché è immediato ottenere i grafici della funzione e della sua derivata prima e anche individuare, in modo grafico, i valori dei parametri *a* e *b*.