CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

**Simulazione di prova scritta di Matematica – Fisica – 28 febbraio 2019**

**Problema 2 - Soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX di Texas Instruments**

***Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology***

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con $q$ positivo) è fissata nell'origine $O$ di un sistema di riferimento nel piano $Oxy$ (dove $x$ e $y$ sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta $r$ di equazione $y = 1$.

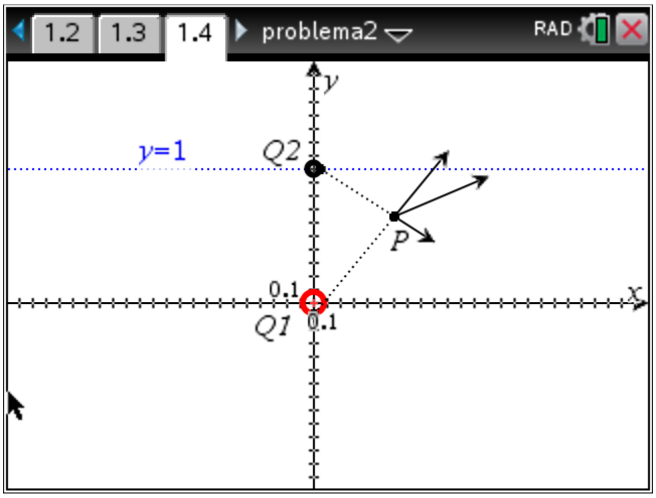
1. Supponendo che la carica $Q_2$ sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto $P$ del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche $Q_1$ e $Q_2$ è nullo. Individuare la posizione del punto $P$ e discutere se una terza carica collocata in $P$ si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.

2. Verificare che, se la carica $Q_2$ si trova nel punto della retta $r$ avente ascissa $x$, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da $Q_1$ e $Q_2$ è data da
$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$
dove $k$ è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$).

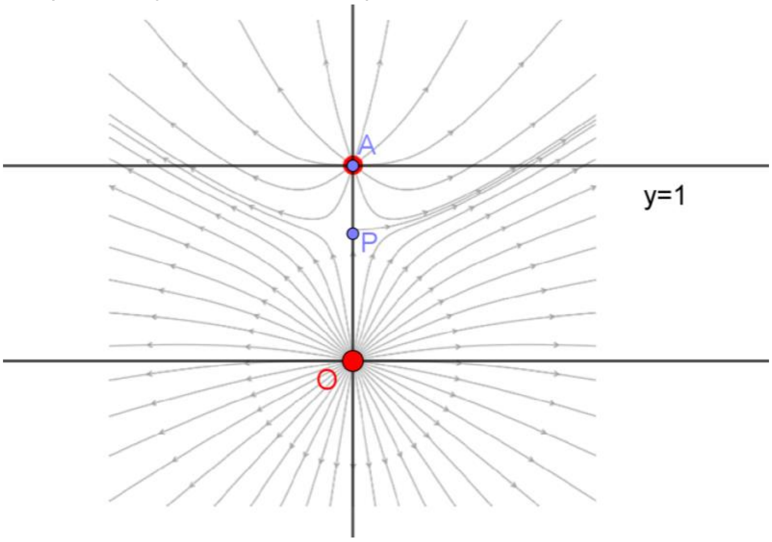
3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

**Punto 1**
Il campo elettrico in un punto *P* del piano può essere rappresentato nel seguente modo:




Se $Q_2$ è posta nel punto $A(0,1)$, il campo elettrico è simmetrico rispetto all'asse *y* (asse passante per le due cariche generatrici del campo elettrico). Quindi il campo, nello spazio, ha una simmetria cilindrica rispetto all'asse *y*.
Nel piano *Oxy* le linee del campo elettrostatico sono indicate in modo approssimato nella seguente figura.




Il campo sarà nullo in un punto sull'asse *y* che giace tra le due cariche. Sia $P(0;y)$ tale punto. In *P* campi elettrici generati da $Q_1$ e da $Q_2$ devono essere opposti. Pertanto:

$$k\frac{4q}{y^2}=k\frac{q}{(1-y)^2}.$$

Si ottiene:

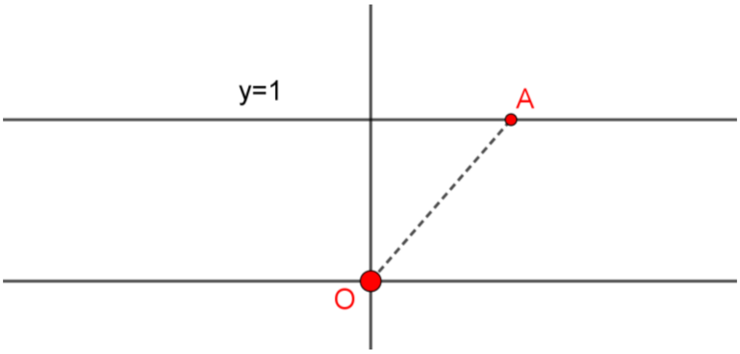
$$4(1-y)^2=y^2.$$

Si ricava $2|1-y|=|y|$.

L'unica soluzione accettabile è data da $2(1-y)=y$, che fornisce $y=\frac{2}{3}$ .

Una terza carica *Q* positiva (molto piccola rispetto alle cariche generatrici del campo) posta nel punto *P*(0, 2/3) si trova in un punto di equilibrio instabile. Infatti, se la carica viene allontanata di pochissimo dal punto *P*, essa tende ad allontanarsi ancora di più. La stessa situazione di equilibrio instabile si verifica se una terza carica *Q* negativa (molto piccola rispetto alle cariche generatrici del campo elettrico), viene posta nel punto *P*. Se la si allontana di pochissimo da *P*, tende a muoversi verso la carica più vicina e non torna nel punto *P.*

**Punto 2**




Se la carica $Q_2$ è vincolata a stare sulla retta di equazione $y = 1$, allora chiamiamo $A(x;1)$ le coordinate del punto.
Nel piano *Oxy* l'energia potenziale elettrostatica del sistema formato dalle due cariche è una funzione in due variabili. A meno di una costante additiva, in un generico punto del piano possiamo scrivere:

$$U(x, y) = k\frac{Q_1 Q_2}{r}$$

dove *r* è la distanza tra le due cariche generatrici del campo elettrico.
Poiché $y = 1$, per ogni punto di questa retta l'energia potenziale elettrostatica è una funzione in una sola variabile:

$$U(x) = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**Punto 3**

La funzione *U*(*x*), a meno di una costante moltiplicativa positiva ($4kq^2$), ha un grafico affine a quello della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

il cui grafico è riportato di seguito.

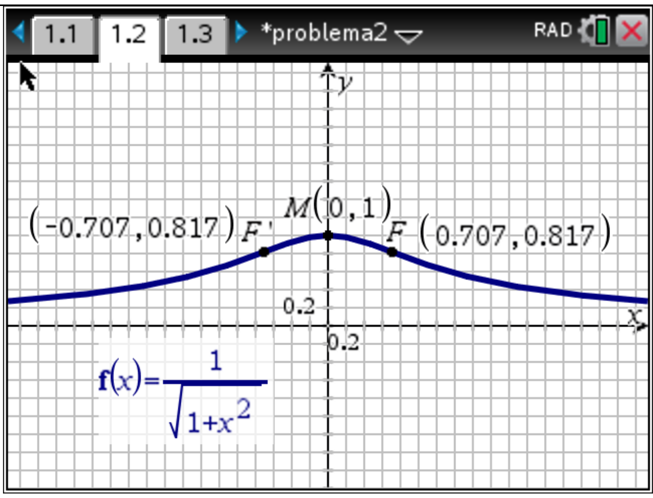
$f(x)$ è una funzione pari.

La derivata prima è $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

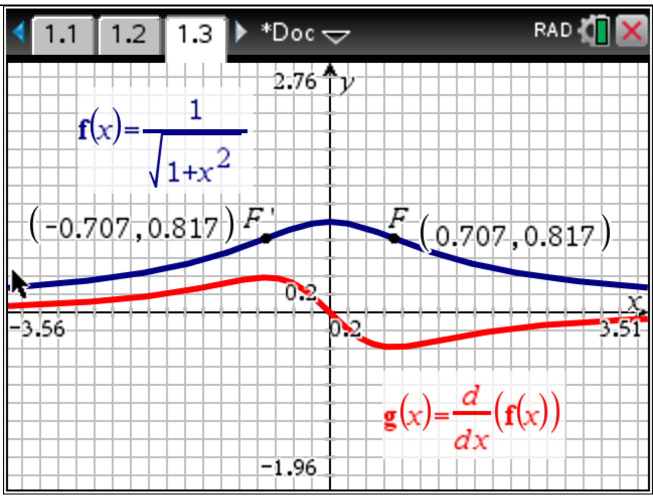
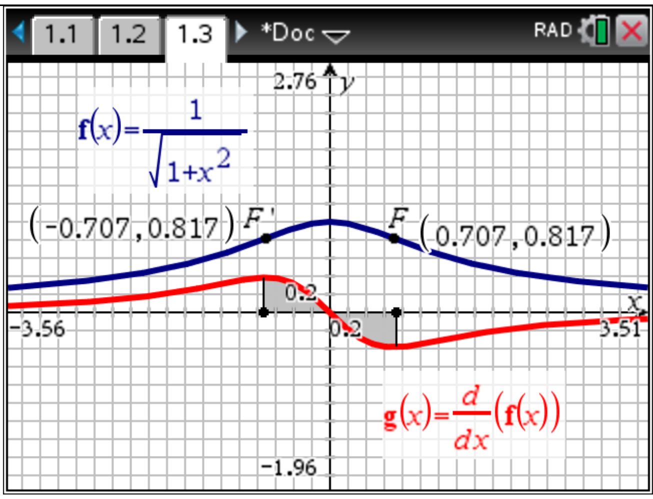
Quindi il massimo si ha per $x = 0$ e vale 1.

La derivata seconda è $f''(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

I flessi sono pertanto nei punti $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



**Punto 4**

| | |
|---|---|
| Riportiamo qui di seguito il grafico della derivata prima $U'(x)$ a meno di una costante moltiplicativa positiva.<br><br>La derivata prima è una funzione dispari (perché è la derivata di una funzione pari).<br><br>Per ottenere il grafico della derivata prima occorre scrivere<br><br>$g(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$ |  |
| Essendo la funzione $g(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$ dispari, si ha: $\int_{-m}^{m} g(x)\,dx=0$ e questo è valido in generale per ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine, non solo per $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ . |  |

**Giudizio sul problema**
Il problema ha un livello di difficoltà alto nella parte iniziale. Si tratta di un problema che parte dalla fisica (i primi due punti sono di elettrostatica) e poi arriva alla matematica. È quindi inizialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Fisica che in quello di Matematica.
Per la risoluzione di questo problema la calcolatrice grafica può essere utile per i punti 3 e 4 perché si possono tracciare immediatamente i grafici richiesti. Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti.