CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

Simulazione di prova scritta di Matematica – Fisica – 28 febbraio 2019
Problema 1 - Soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX di Texas Instruments
Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione
$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

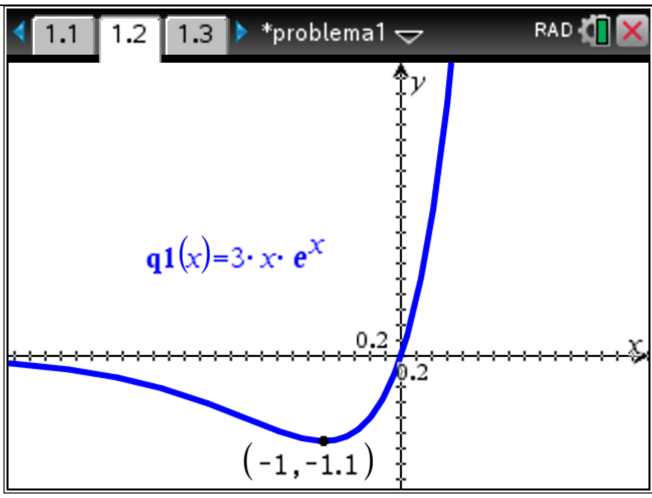
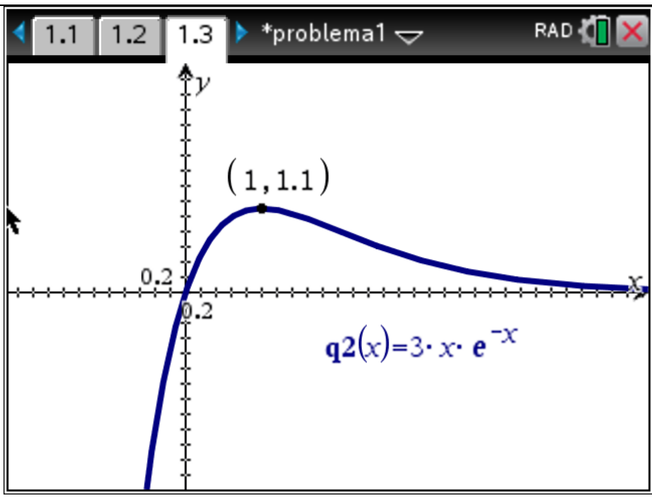
Punto 1

Poiché $a > 0$, possiamo esaminare due casi: $b > 0$ oppure $b < 0$.

La derivata prima della funzione $q(t) = a\,t\,e^{bt}$ è data da

$q'(t) = a\left(e^{bt} + bt\,e^{bt}\right) = ae^{bt}(1+bt)$.

Nella calcolatrice la variabile indipendente sarà indicata con *x* invece che con *t* (essendo *t* un simbolo riservato per le equazioni parametriche).

Se $b > 0$ la derivata prima $q'(t) = ae^{bt}(1+bt)$ è positiva per $t \geq -\frac{1}{b}$ e la funzione $q(t)$ ha un minimo relativo (e assoluto) per $t = -\frac{1}{b}$. Nel grafico a fianco abbiamo posto, per esempio, $a = 3$ e $b = 1$. La funzione ha un minimo nel punto di ascissa $x = -1$, che la calcolatrice è in grado di determinare in modo numerico.	
Se $b < 0$ la funzione $q(t)$ ha un massimo relativo (e assoluto) per $t = -\frac{1}{b}$. Nella figura a fianco si ha, per esempio, $a = 3$ e $b = -1$. La funzione ha un massimo nel punto di ascissa $x = 1$, che la calcolatrice è in grado di determinare in modo numerico.	

Imponiamo che il massimo della funzione sia il punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} q(2) = \frac{8}{e} \\ q'(2) = 0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 2a\,e^{2b} = \dfrac{8}{e} \\ a\,e^{2b}(1+2b) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i valori $a = 4$ e $b = -\dfrac{1}{2}$.

Punto 2

La funzione diventa pertanto $q(t) = 4\,t\,e^{-\frac{t}{2}}$.

La derivata prima è

$$\frac{dq}{dt} = q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right) = 2e^{-\frac{t}{2}}(2-t).$$

La derivata seconda è:

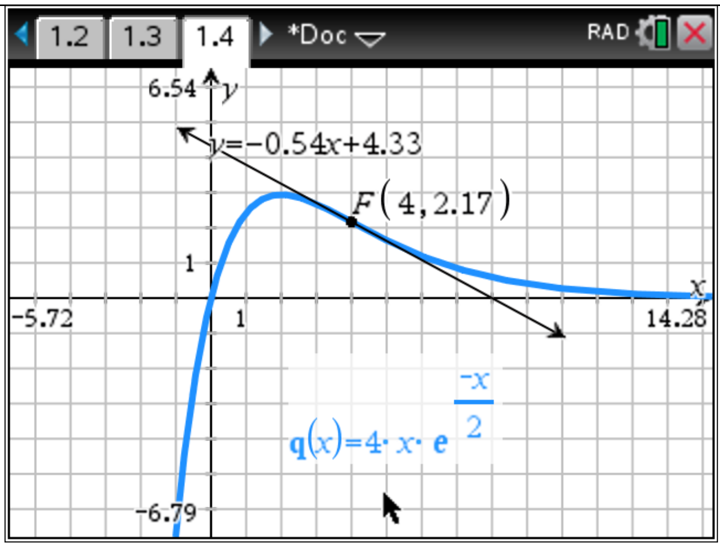
$$\frac{d^2q}{dt^2} = q''(t) = 4\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) = -2e^{-\frac{t}{2}}\left(1-\frac{t}{2}+1\right) = e^{-\frac{t}{2}}(t-4)$$

Il flesso ascendente è il punto $F\left(4;\dfrac{16}{e^2}\right)$.

Il grafico della funzione $q(t)$ è quello riportato a fianco. La variabile indipendente è stata indicata con *x*. Abbiamo anche disegnato la retta tangente nel punto di flesso.

La calcolatrice, ovviamente, essendo “non CAS”, visualizza l’equazione della tangente di flesso in modo approssimato:

$y = -0.54x + 4.33$.



La retta tangente in *F*, nel piano *Oty* ha equazione $y-\dfrac{16}{e^2} = -\dfrac{4}{e^2}(t-4)$, cioè in modo approssimato (e indicando *x* invece di *t*) $y = -0.54x + 4.33$.

Punto 3

La costante *b* ha le dimensioni di un tempo alla -1, e si misura quindi in s^{-1}.

Se $q(t)$ rappresenta una carica, la costante *a* ha le dimensioni di una carica per un tempo alla -1: si misura quindi in Cs^{-1}, cioè in ampere (A).

Nel testo, la definizione, come grandezza fisica, della funzione $q(t)$ non è chiara…. Assumiamo che $q(t)$ sia una carica e che *dq* sia la carica elettrica infinitesima che fluisce attraverso la sezione di un conduttore nell’intervallo di tempo infinitesimo *dt*. Si ha quindi $\frac{dq}{dt}=i(t)$. Pertanto $q(t)=\int_0^t i(t)\,dt$ e quindi $q(t)$ è la quantità di carica che ha attraversato una sezione del conduttore nell'intervallo di tempo $[0,t]$. La derivata di $q(t)$ è pertanto l'intensità di corrente istantanea.

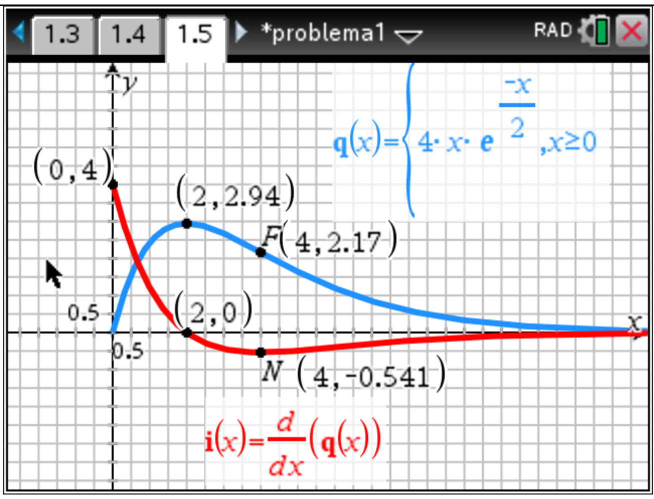
Il grafico della intensità di corrente è riportato in rosso nel grafico a fianco e al crescere del tempo l'intensità di corrente tende a zero (per valori negativi).

Il minimo della corrente si ha per *t*=4 s e vale

$$i_{\min}=-\frac{4}{e^2}\approx -0.541\ \text{A}.$$

Il massimo si ha per *t*=0 s e vale 4 A.

La calcolatrice è in grado di determinare sia il massimo che il minimo (in modo approssimato).



Si ha inoltre (ma questo calcolo simbolico la calcolatrice non può farlo):

$$\lim_{t\to+\infty} i(t)=\lim_{t\to+\infty} 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)=2\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{2-t}{e^{\frac{t}{2}}}\overset{H.}{=}2\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}}=0.$$

Punto 4

Probabilmente il testo chiedeva di calcolare il seguente integrale (la formulazione del quesito è ambigua).

$$Q(t_0)=\int_0^{t_0} i(t)\,dt=\int_0^{t_0} q'(t)\,dt=\left[q(t)\right]_0^{t_0}=4t_0\,e^{-\frac{t_0}{2}}.$$

Si ha

$$\lim_{t_0\to+\infty} Q_0=\int_0^{+\infty} i(t)\,dt=\lim_{t_0\to+\infty}\left(4t_0\,e^{-\frac{t_0}{2}}\right)=4\lim_{t_0\to+\infty}\left(\frac{t_0}{e^{\frac{t_0}{2}}}\right)\overset{H.}{=}4\lim_{t_0\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{t_0}{2}}}\right)=0.$$

L'energia dissipata per effetto Joule nel circuito nell'intervallo di tempo [0, t_0] è data da

$$W=\int_0^{t_0} R i^2\,dt=\int_0^{t_0} R\left(q'(t)\right)^2 dt=3\int_0^{t_0}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}(2-t)\right)^2 dt=12\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-t}(2-t)^2\,dt$$

che lasciamo indicato (come richiesto dal testo).

Giudizio sul problema

Il problema ha un livello di difficoltà alto. Si tratta di un problema che parte dalla matematica (primi due punti) e poi arriva alla fisica. È quindi parzialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Matematica che in quello di Fisica. Si nota un'ambiguità di formulazione nel punto 3, nella definizione della funzione q(t), e anche nel punto 4 sulla definizione di $Q(t_0)$.

Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti. Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti.