

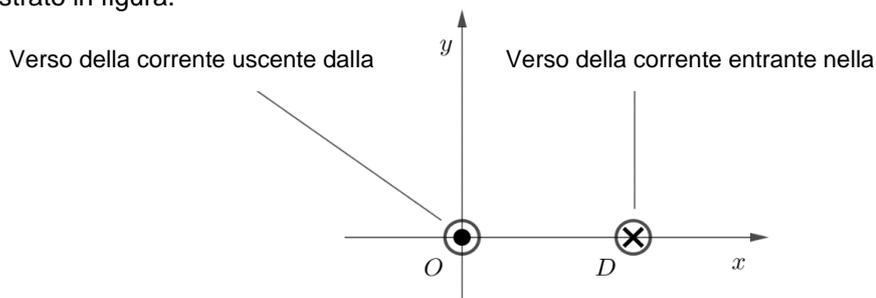
Simulazione di prova scritta di Matematica – Fisica – 2 aprile 2019

Problema 1 - Soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX di Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology



Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale Oxy , dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1, 0)$, come mostrato in figura.



Punto 1

Verificare che l'intensità del campo magnetico \vec{B} , espresso in tesla (T), in un punto $P(x, 0)$, con $0 < x < 1$, è data dalla funzione $B(x) = K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right)$, dove K è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore \vec{B} al variare di x nell'intervallo $(0, 1)$. Per quale valore di x l'intensità di \vec{B} è minima?

Punto 2

Nella zona di spazio sede del campo \vec{B} , una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni. Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico \vec{B} nei punti dell'asse x esterni al segmento OD . Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico \vec{B} è nullo?

Punto 3





Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra r e il grafico di f .

Punto 4

Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x) dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l'integrale

$$g(t) = \int_2^t |f(x)| dx$$

e calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

Soluzione

Punto 1

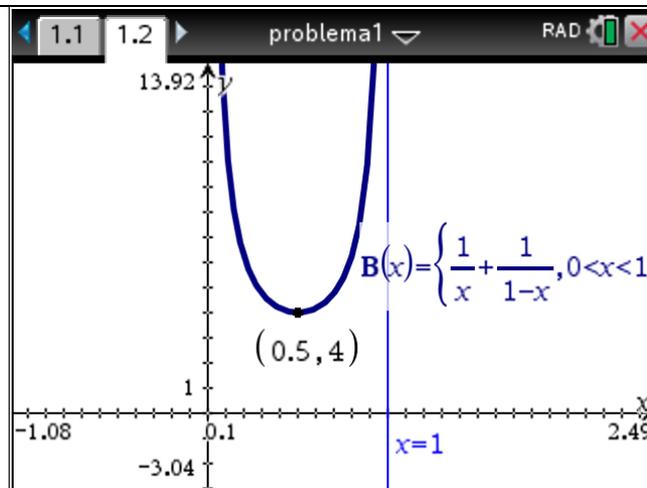
Nel punto P , per la legge di Biot-Savart, il modulo del campo magnetico è dato dalla somma dei contributi dei moduli dei campi magnetici (entrambi orientati nel verso positivo dell'asse y) generati dai due fili: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$.

L'unità di misura di K è $T \cdot m = \frac{N}{A}$.

Il grafico di $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ è quello a fianco (è stato posto $K=1$).
 Per simmetria il minimo deve essere in $x = \frac{1}{2}$.
 Se si deriva la funzione si ottiene lo stesso risultato. La derivata della funzione è:

$$B'(x) = K \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

 La derivata prima si annulla in $x = \frac{1}{2}$, che è un punto di minimo.



Punto 2

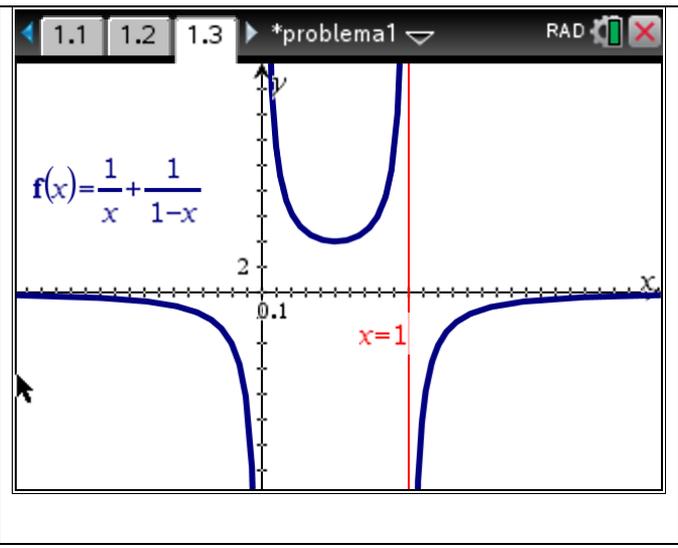
La forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$, agente sulla carica in moto è nulla, essendo il vettore velocità parallelo al vettore campo magnetico; quindi il suo moto è rettilineo uniforme.

Nei punti dell'asse x esterni al segmento OD il campo magnetico, orientato nel verso negativo di y , è dato dalla differenza dei moduli dei campi magnetici, di verso opposto, generati dai due fili; ha modulo (e segno) dati dalla funzione $B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, la stessa espressione valida per $0 < x < 1$. Non esistono punti sull'asse x in cui il campo si annulla.





Il campo magnetico ha verso contrario all'asse y per $x < 0$ o per $x > 1$ e lo stesso verso dell'asse y per $0 < x < 1$.
 Il grafico dell'intensità del campo magnetico (con il segno) è riportato qui a fianco, dove è stato posto $K = 1$.



Punto 3

La funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, di dominio $\mathbb{R} - \{0,1\}$, non interseca gli assi cartesiani, presenta due asintoti verticali di equazione $x = 0$ e $x = 1$ ed ha l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

La derivata prima $f'(x) = K \frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$ presenta un punto stazionario in $\left(\frac{1}{2}, 4K\right)$.

La derivata seconda è: $f''(x) = 2K \cdot \frac{3x^2-3x+1}{x-x^2}$; quindi la funzione $f(x)$ non presenta punti di flesso.

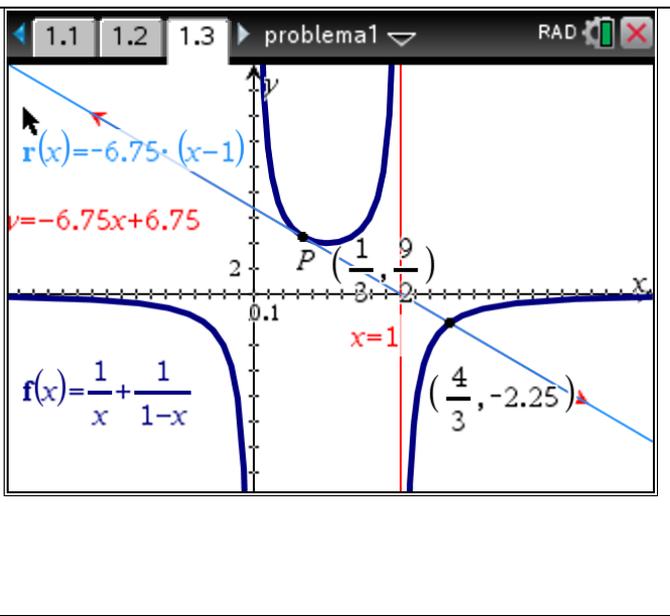
Un possibile grafico della funzione, ottenuto per $K = 1$, è riportato nel seguito.

La retta r tangente alla curva in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ ha pendenza $m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{4}K$, ed equazione:

$$y = \frac{27}{4}K(1 - x).$$

Tale retta interseca la funzione in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ (intersezione doppia) e in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}K\right)$.

La funzione ha due asintoti verticali le rette di equazioni: $x = 0$ e $x = 1$.
 È strettamente decrescente e concava per $x < 0$ (dove è negativa); strettamente decrescente e convessa da 0 a 1/2; strettamente crescente e convessa per $\frac{1}{2} < x < 1$ (positiva in $(0, 1)$); strettamente crescente e concava per $x > 1$ (e qui negativa).
 Il punto P ha coordinate $(1/3; 9/2)$.
 La tangente in $P\left(\frac{1}{3}; \frac{9}{2}\right)$ ha equazione

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{ ovvero, } y = -\frac{27}{4}(x - 1).$$


L'ulteriore punto di intersezione Q tra la tangente t e la curva si trova dal seguente sistema:





$$\begin{cases} y = -\frac{27}{4}(x-1) \\ y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27x(x-1)^2 = 4 \\ y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-4)(3x-1)^2 = 0 \\ y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{cases}$$

Si ottiene $Q(4/3; -9/4)$.

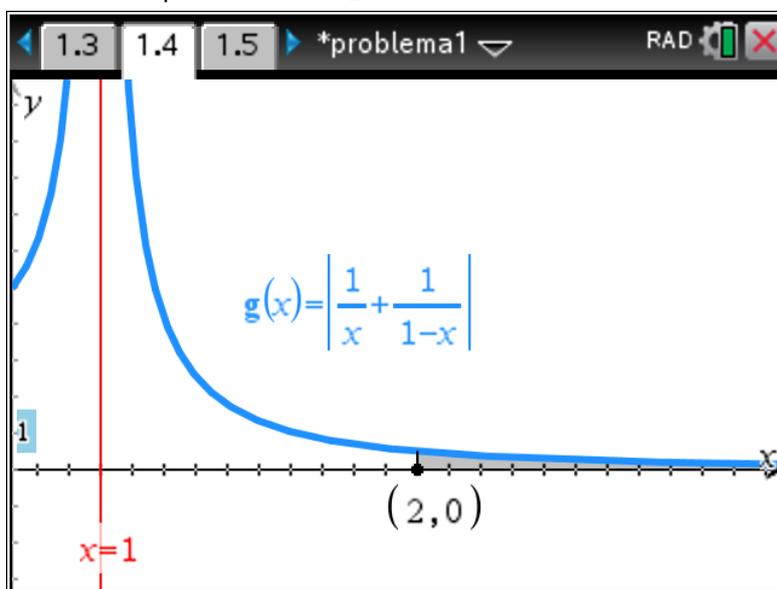
Punto 4

L'integrale $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = K \cdot [\ln|x| - \ln|1-x|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 2K \ln 3$ rappresenta l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$.

Per $x \geq 2$, essendo la funzione negativa, si ha:

$$g(t) = \int_2^t K \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = K \cdot [\ln|x-1| - \ln|x|]_2^t = K \cdot \left(\ln \left(\frac{t-1}{t} \right) + \ln 2 \right)$$

Il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[K \ln \left(2 \left(\frac{t-1}{t} \right) \right) \right] = K \ln 2$ rappresenta il limite a cui tende l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dalla retta $x = 2$ e dall'asse delle ascisse per i valori di $x \geq 2$.



Commento sul problema 1

Il problema ha un livello di difficoltà alto.

Il testo contiene alcune imprecisioni (filo "indefinito", cosa significa?).

Si tratta di un problema che parte dalla Fisica (primi due punti) e poi arriva alla Matematica.





È quindi parzialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel QdR di Matematica che in quello di Fisica. Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti e osservarne le proprietà.

Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti (perché le calcolatrici permesse non sono CAS).

